## 44 ベクトルと空間図形

**366**

**(1)**

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は面 OAB の垂線だから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

これと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\\&=s\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=s+t\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 60^\circ-\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 45^\circ\\&=s+\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\\&=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}\\&=\frac{s}{2}+t-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

より，$\begin{cases}s+\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0\\ \dfrac{s}{2}+t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0\end{cases}$

この連立方程式連立方程式を解くと，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　$\therefore\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

**(2)**

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2&=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2\\&=\frac{2}{9}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{2}{9}\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{4}{9}\cos 60^\circ-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos 45^\circ-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos 45^\circ\\&=\frac{3}{9}\end{aligned}$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|$ すなわち CH の長さは $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**(3)**

四面体 OABC の底面を△OAB にすると，高さは CH の長さになるから，

その体積は$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 60°\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{12}$

**367**

**(1)**

$k$, $s$, $t$ を適当な実数とする。

点 Q は線分 OP 上の点だから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=k\overrightarrow{OG}\\&=k\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\\&=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

点 Q は平面 ADE 上の点だから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}\\&=\overrightarrow{OA}+s\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}\\&=(1-s-t)\vec{a}+2s\vec{b}+3t\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$\frac{k}{3}=1-s-t=2s=3t$ より，$k=\frac{18}{11}$，$s=\frac{3}{11}$，$t=\frac{2}{11}$

ゆえに，$\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{11}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

**(2)**

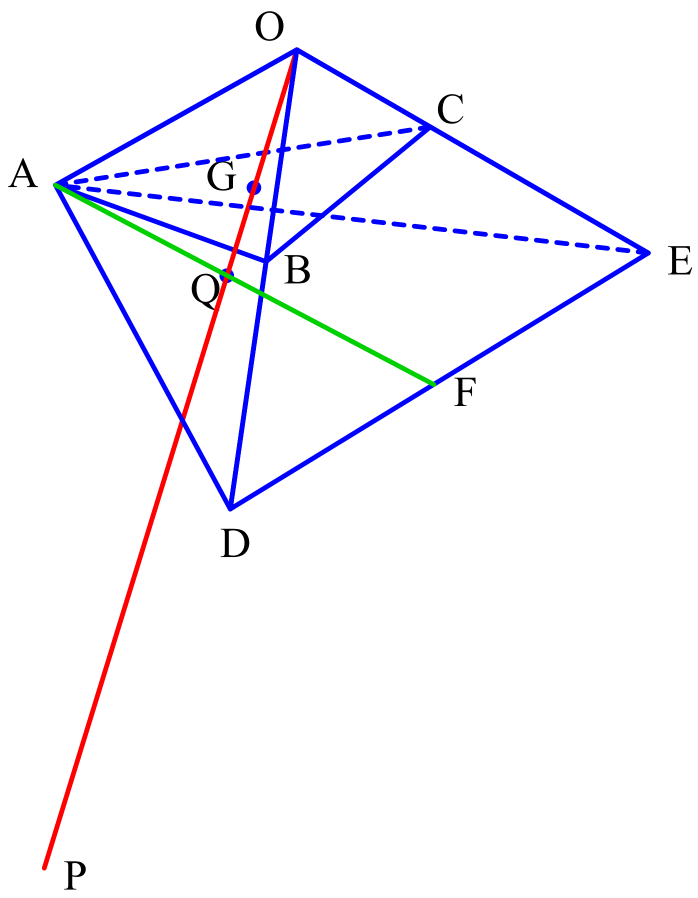
(1)より，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}$，$s=\frac{3}{11}$，$t=\frac{2}{11}$ だから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}&=\frac{3}{11}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AE}\\&=\frac{5}{11}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}\right)\end{aligned}$$

よって，DE を 2：3 に内分する点を F とすると，AF：QF＝11：$(11-5)$

すなわち QF＝$\frac{6}{11}$AF より, DF を底辺にとったときの△QDE の高さは△ADE の$\frac{6}{11}$である。

ゆえに，$\frac{S_2}{S_1}=\frac{6}{11}$




**(3)**

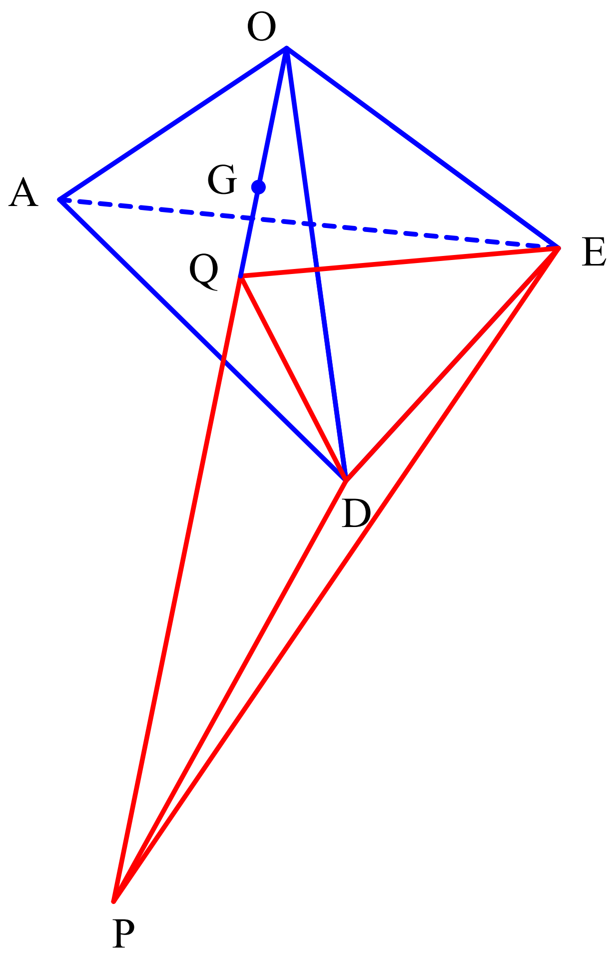
$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}=\frac{6}{11}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{6}{11}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{18}{11}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{18}{11}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=6\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\frac{18}{11}\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{48}{11}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

よって，$\therefore\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}=\frac{8}{3}$

ゆえに，$\frac{V_2}{V_1}=\frac{16}{11}$


O
A
G
Q
E
D
P

**368**

**(1)**

$s,\ t$ を実数とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4t\\4t\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}s\\s\\\sqrt{6}s\end{pmatrix}$$

より，

$\mathrm{P}(4-4t,\ 4t,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(s,\ s,\ \sqrt{6}s\right)$

よって，直線 AB と直線 OC が交わるための必要十分条件は点 P と点 Q の座標が一致することである。すなわち連立方程式$\begin{cases}4-4t=s\\4t=s\\0=\sqrt{6}s\end{cases}$ の解が存在することである。

これを解くと，$0=\sqrt{6}s$ より，$s=0$ であるが，これは$\begin{cases}4-4t=s\\4t=s\end{cases}$ を満たさない。

よって，解は存在しない。

ゆえに，直線 AB と直線 OC は交わらない。

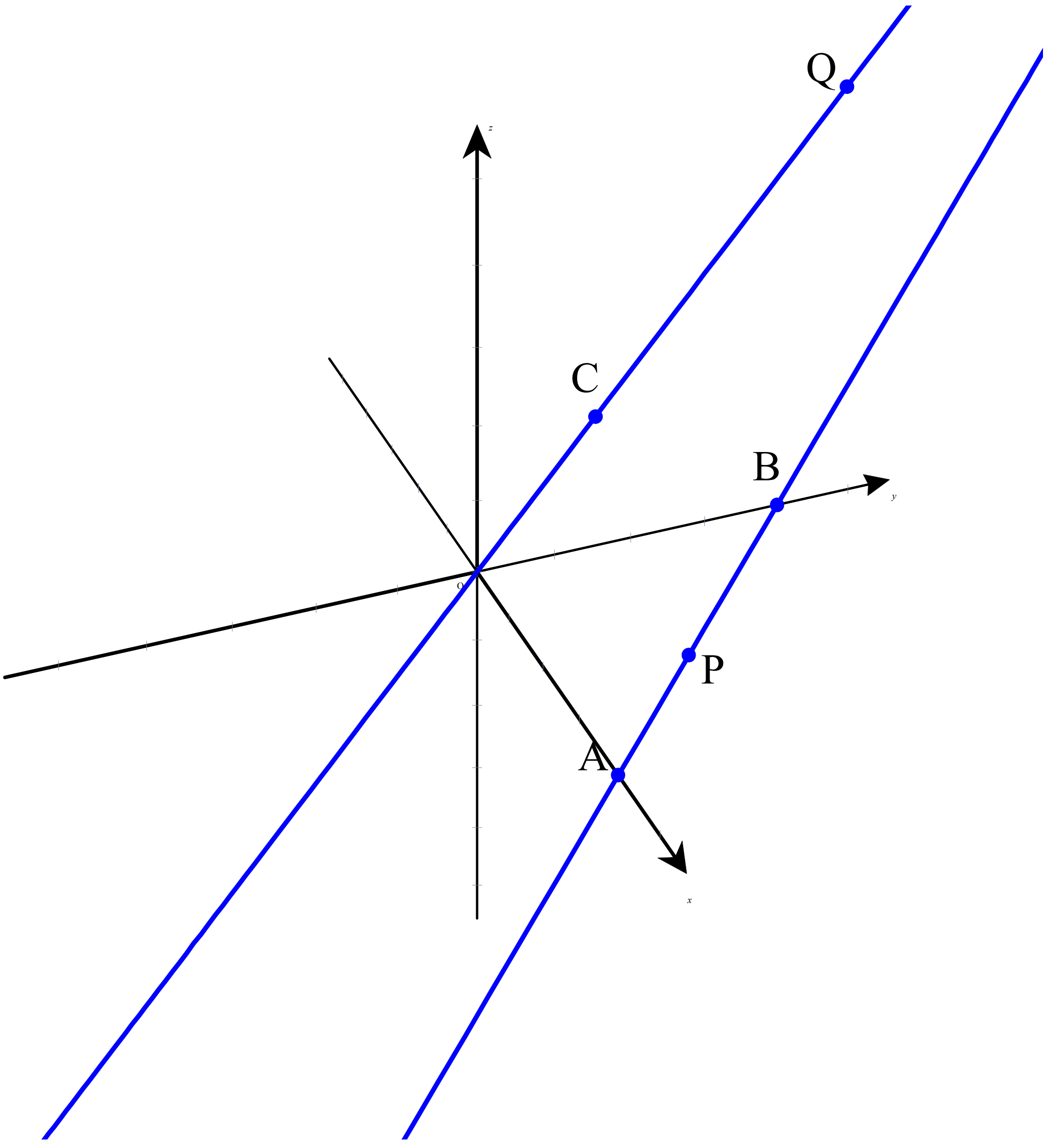
**(2)**

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\{s-(4-4t)\}^2+(s-4t)^2+\left(\sqrt{6}s\right)^2\\&=8s^2-8s+32t^2-32t+16\\&=8\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+32\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+6\end{aligned}$$

よって，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ で $\mathrm{PQ}^2$ は最小値 6 をとる。

ゆえに，PQ の最小値は $\sqrt{6}$

また，そのときの点 P および点 Q の座標は，それぞれ $(2,\ 2,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$



Q
C
B
P
A

**369**

**(1)**

平面$\alpha$上の点を$(x,\ y,\ z)$とすると，$\vec{n}$はAを始点とする任意の位置ベクトルと垂直だから，

平面$\alpha$の方程式は，$-3(x-1)+1(y-2)+2(z-4)=0$より，$3x-y-2z+7=0$　・・・①

$\mathrm{R}(a,\ b,\ c)$とすると，適当な実数$t$を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\vec{n}$すなわち$\begin{pmatrix} a+2 \\ b-1 \\ c-7 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$と表せる。

よって，$\mathrm{R}(a,\ b,\ c)=(-3t-2,\ t+1,\ 2t+7)$　・・・②

したがって，PとRの中点の座標は$t$を用いて，$\left(-\dfrac{3}{2}t-2,\ \dfrac{t}{2}+1,\ t+7\right)$　・・・③

と表される。

PとRの中点の座標は①を満たすから，

③を①に代入し，整理すると，$-7t-14=0$　$\therefore t=-2$

これと②より，$\mathrm{R}(4,\ -1,\ 3)$

**(2)**

2点P, Qは平面$\alpha$に関して同じ側にあることと点Rは平面$\alpha$に関して点Pと対称な点であることから，直線PRと平面$\alpha$の交点をHとすると，直線HSは線分PSの垂直二等分線である。したがって，PS＝RSより，$\mathrm{PS}+\mathrm{QS}=\mathrm{RS}+\mathrm{QS}$が成り立つ。

よって，$\mathrm{PS}+\mathrm{QS}=\mathrm{RS}+\mathrm{QS}\geq \mathrm{RQ}=\sqrt{(1-4)^2+\{3-(-1)\}^2+(7-3)^2}=\sqrt{41}$

また，$\mathrm{RS}+\mathrm{QS}=\mathrm{RQ}$となるときの点Sは直線RQと平面$\alpha$の交点である。

そこで点Sの座標を以下のように求める。

点Sは直線RQ上の点だから，適当な実数$s$を用いると，

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+s\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-3s \\ -1+4s \\ 3+4s \end{pmatrix}$より，$\mathrm{S}(4-3s,\ -1+4s,\ 3+4s)$　・・・④

点Sは平面$\alpha$上の点だから，④は①を満たす。

よって，$3(4-3s)-(-1+4s)-2(3+4s)+7=0$より，$s=\dfrac{2}{3}$

これを④に代入することにより，$\mathrm{S}\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$

以上より，

$\mathrm{PS}+\mathrm{QS}$を最小にする点Sの座標は$\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$で，そのときの最小値は$\sqrt{41}$である。

**370**

**(1)**

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-3 \end{pmatrix}$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)&=(x-1)\cdot 3x+y(3y-2)+z(3z-6)\\&=3x^2-3x+3y^2-2z+3z^2-6z\\&=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+3(z-1)^2-3\\&=3\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2\right\}-\frac{49}{12}\end{aligned}$$

これと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)=0$ より，$3\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2\right\}-\frac{49}{12}=0$

すなわち，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$

よって，定点 Q の座標を$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$とすると，点 P と定点 Q の距離は$\frac{7}{6}$で一定である。

**(2)**

3 点 A，B，C で定まる平面上の点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$，

平面の法線ベクトルを$\vec{n}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$（$\vec{n}\neq\vec{0}$）とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}\perp\vec{n}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}\cdot\vec{n}=0$

よって，

$\alpha(x-1)+\beta y+\gamma z=0\quad\therefore\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha$　・・・①

$\alpha x+\beta(y-2)+\gamma z=0\quad\therefore\alpha x+\beta y+\gamma z=2\beta$　・・・②

$\alpha x+\beta y+\gamma(z-3)=0\quad\therefore\alpha x+\beta y+\gamma z=3\gamma$　・・・③

①～③より，$\alpha=2\beta=3\gamma$

よって，$\alpha=6$ とすると，$\beta=3$，$\gamma=2$

よって，3 点 A，B，C で定まる平面の方程式は$6x+3y+2z=6$であり，

$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$は，この方程式を満たす。

よって，定点 Q は 3 点 A，B，C を通る平面上にある。

**(3)**

点 P は，平面 ABC 上の定点 Q を中心とする，半径 $\dfrac{7}{6}$ の球面上の任意の点だから，

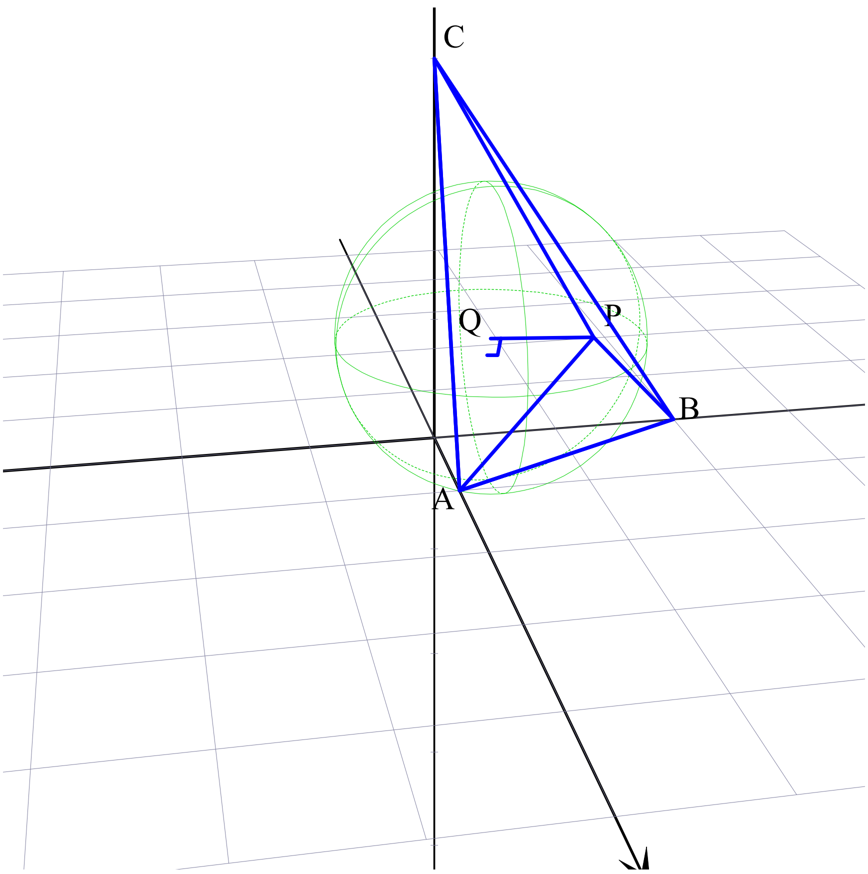
四面体 ABCP の底面を△ABC とすると，PQ⊥平面 ABC を満たす点 P が存在し，

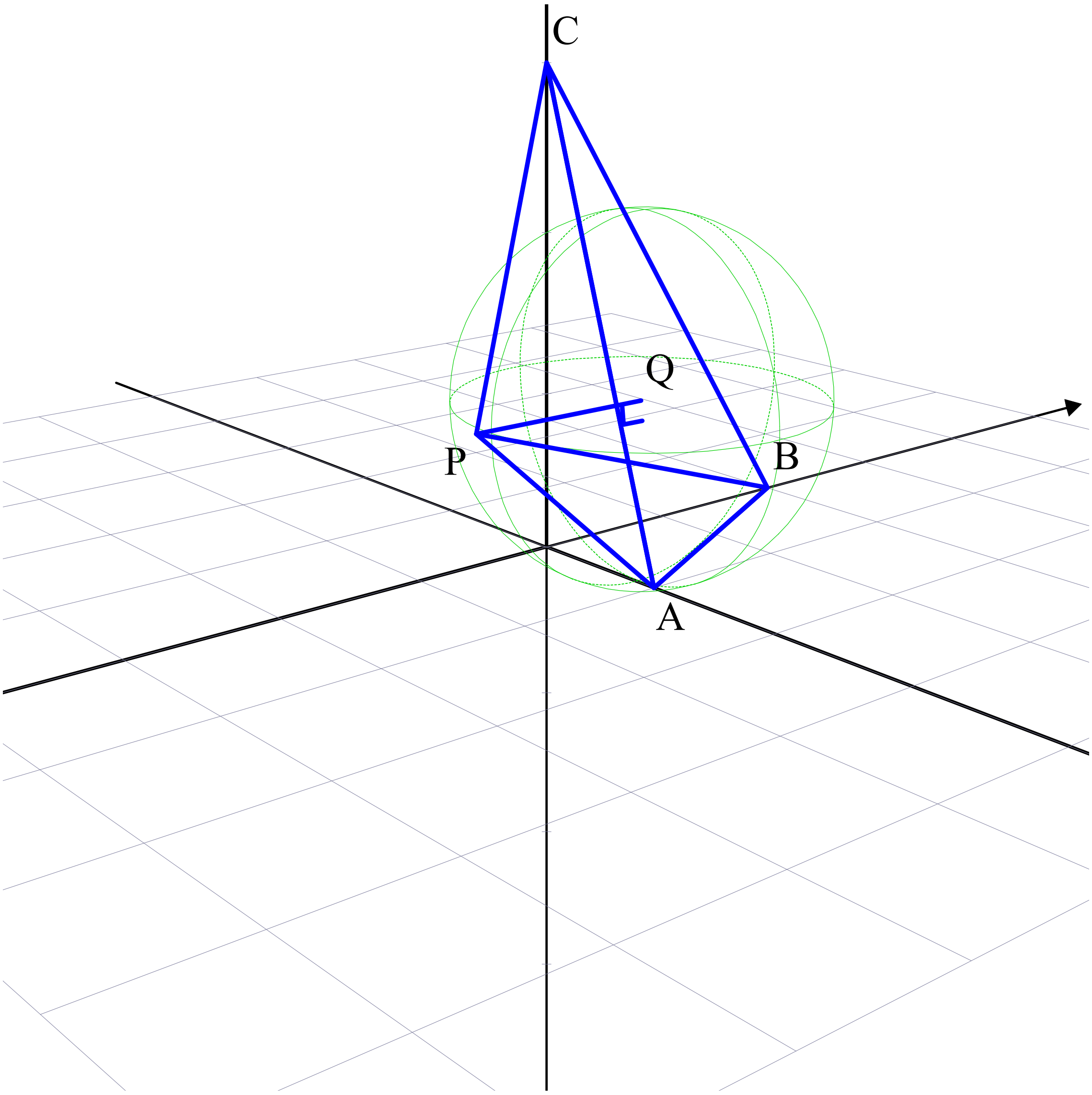
このとき，四面体 ABCP の高さは最大値 $\dfrac{7}{6}$ をとる。

また，△ABC の面積は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle BAC &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\sin^2\angle BAC} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\left(1-\cos^2\angle BAC\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 10-1} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

よって，四面体 ABCP の体積の最大値は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{49}{36}$




C
Q
P
B
A

**371**

**(1)**

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 0$

これと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\ &= k\begin{pmatrix} a \\ b \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka \\ kb-2 \\ -3k+1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より，

$$ka \cdot a + (kb-2) \cdot b + (-3k+1) \cdot -3 = 0 \qquad \therefore k = \frac{2b+3}{a^2+b^2+9}$$

また，これより，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| &= \sqrt{(ka)^2 + (kb-2)^2 + (-3k+1)^2} \\ &= \sqrt{k^2(a^2+b^2+9) - 2k(2b+3) + 5} \\ &= \sqrt{\frac{(2b+3)^2}{a^2+b^2+9} - \frac{2(2b+3)^2}{a^2+b^2+9} + 5} \\ &= \sqrt{\frac{5a^2+b^2-12b+36}{a^2+b^2+9}}\end{aligned}$$

以上より，

$k = \dfrac{2b+3}{a^2+b^2+9}$，CH の長さ $= \sqrt{\dfrac{5a^2+b^2-12b+36}{a^2+b^2+9}}$

**(2)**

H は球面を含む球内部の点だから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| \leq 1$，すなわち $\sqrt{\dfrac{5a^2+b^2-12b+36}{a^2+b^2+9}} \leq 1$

よって，$0 \leq \dfrac{5a^2+b^2-12b+36}{a^2+b^2+9} \leq 1$

$a^2+b^2+9>0$ より，$0 \leq 5a^2+b^2-12b+36 \leq a^2+b^2+9$

すなわち $0 \leq 5a^2+b^2-12b+36$ かつ $5a^2+b^2-12b+36 \leq a^2+b^2+9$

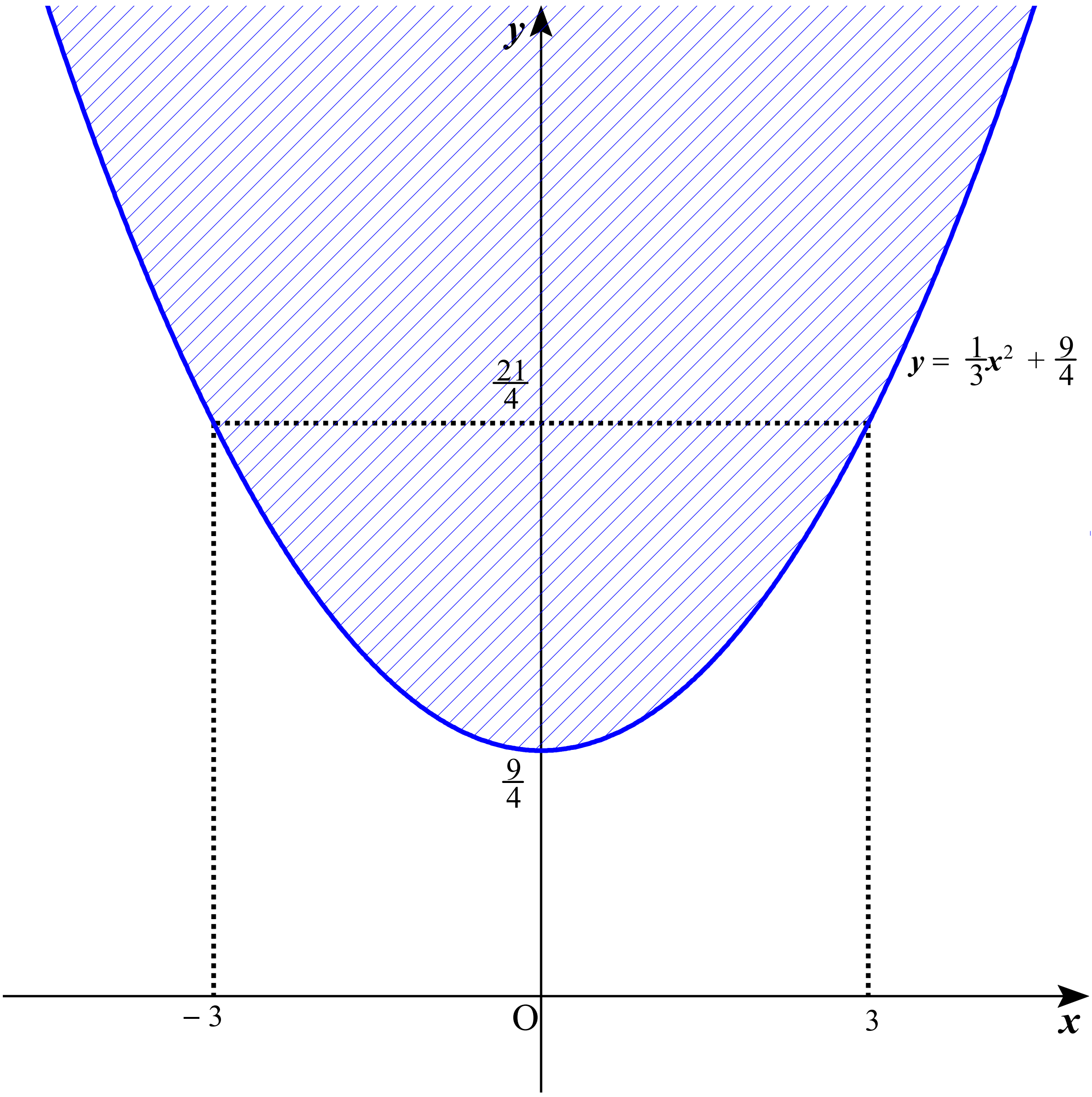
$0 \leq 5a^2+b^2-12b+36$ は，$5a^2+b^2-12b+36 = 5a^2+(b-6)^2$ より，

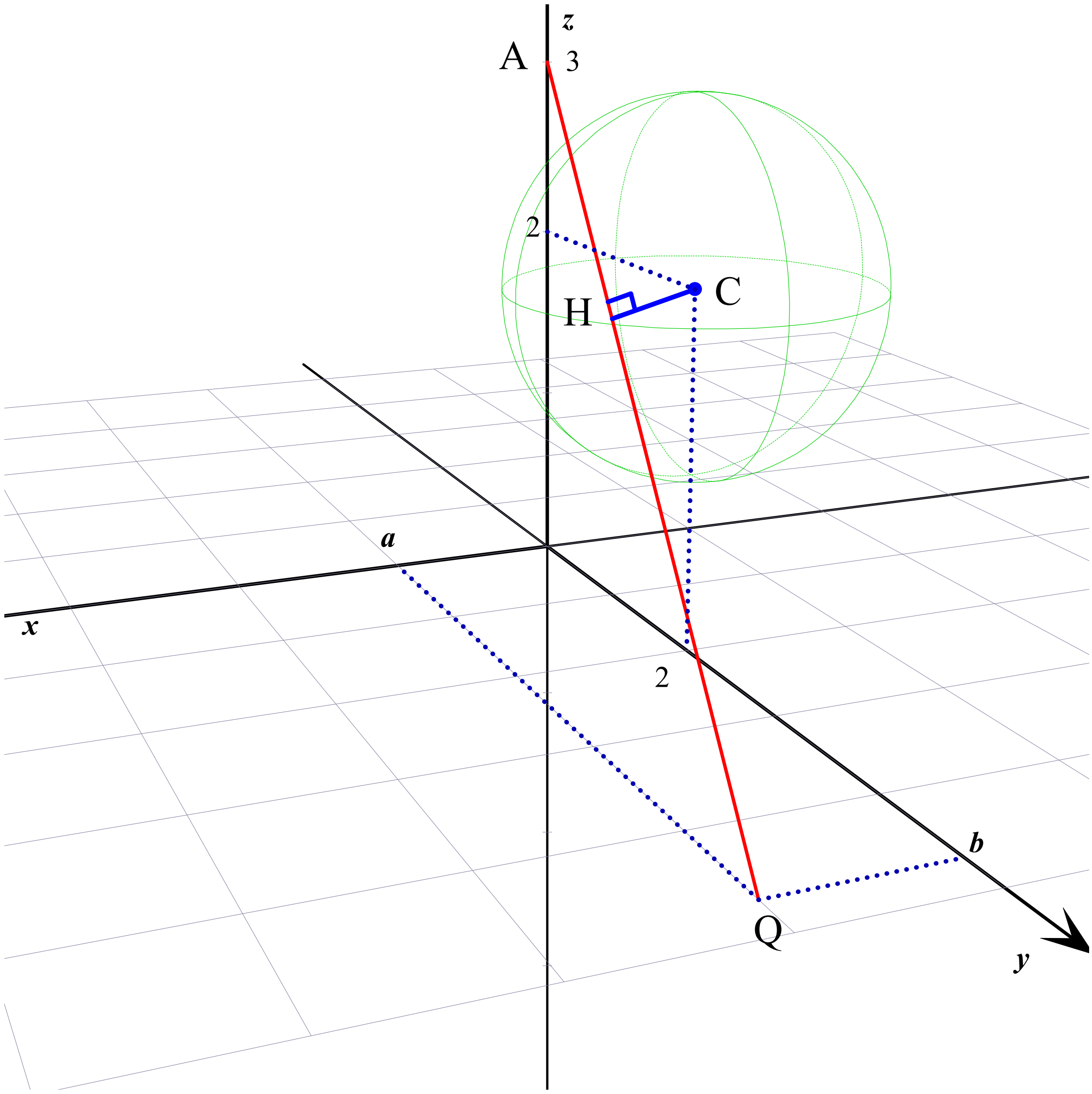
任意の $a$，$b$ で成り立つ。

また，$5a^2+b^2-12b+36 \leq a^2+b^2+9$ を整理すると，$b \geq \dfrac{1}{3}a^2+\dfrac{9}{4}$

よって，点 $\mathrm{Q}(a,\ b,\ 0)$ の存在範囲は $y \geq \dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{9}{4}$ かつ $z=0$

これを $xy$ 平面上に図示すると，下図斜線部（境界線を含む）となる。




z
A
3
2
C
H
a
x
2
b
Q
y

**372**

**(1)**

$0 \leq s,\, t,\, u \leq 1$ とし，

LP を $s : 1-s$ に内分する点を S，MQ を $t : 1-t$ に内分する点を T，NR を $u : 1-u$ に内分する点を U とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= (1-s)\cdot\frac{\vec{a}}{2} + s\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b} + s\vec{c}\right\}\end{aligned}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{1}{2}\left\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\right\}$，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \frac{1}{2}\left\{u\vec{a} + u\vec{b} + (1-u)\vec{c}\right\}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OU}}$ とすると，

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルだから，

$1-s = t = u$ ・・・① $s = 1-t = u$ ・・・② $s = t = 1-u$ ・・・③ が成り立ち，

①～③の連立方程式を解くと，$s = t = u = \frac{1}{2}$ ・・・④

よって，④のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OU}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ となり，S，T，U が一致する。

すなわち，線分 LP，MQ，NR は一点で交わる。

また，④より，その交点はそれぞれの線分の中点である。

**(2)**

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{LP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} \\ &= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} \\ &= \frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\end{aligned}$$

より，$-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 2\vec{p}$ ・・・⑤

同様にして，$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c} = 2\vec{q}$ ・・・⑥ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = 2\vec{r}$ ・・・⑦

$\frac{⑥+⑦}{2}$，$\frac{⑤+⑦}{2}$，$\frac{⑤+⑥}{2}$ より，$\vec{a} = \vec{q}+\vec{r}$，$\vec{b} = \vec{r}+\vec{p}$，$\vec{c} = \vec{p}+\vec{q}$

**(3)**

$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\vec{p}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\vec{p}$ ・・・⑧

また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{XB}}&=\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=-\vec{p}+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{XC}}&=\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=-\vec{p}+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\end{aligned}$$

これと(2)より,

$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=-\vec{q}$ ・・・⑨ $\overrightarrow{\mathrm{XC}}=-\vec{r}$ ・・・⑩

直線 LP，MQ，NR は互いに直交するから，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=0$ ・・・⑪

⑧～⑪より， XA，XB，XC は互いに垂直である。

よって，△XAB を底面にとると，高さは$\left|\overrightarrow{\mathrm{XC}}\right|$

また，△XAB は$\angle\mathrm{AXB}=90°$の直角三角形だから， 底面積$=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{XA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XB}}\right|$

よって，四面体 XABC の体積は$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{XA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XC}}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{XA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XC}}\right|$

これと⑧～⑩より, 四面体 XABC の体積を$|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$を用いて表すと，$\dfrac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$ となる。